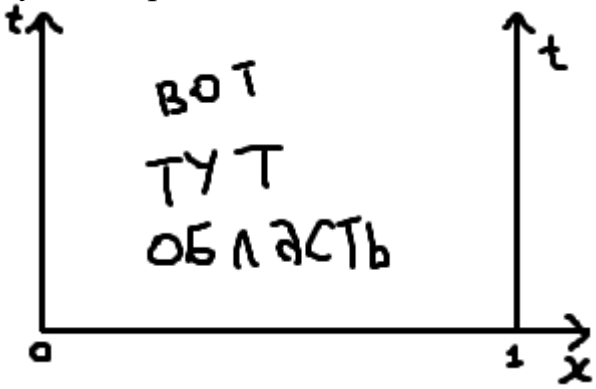
69. Что такое шаблон разностного оператора? Приведите примеры.
70. Приведите пример явной разностной схемы. В чем ее достоинства и недостатки?
71. Приведите пример неявной разностной схемы. В чем ее достоинства и недостатки?
72. Напишите условия устойчивости явной разностной схемы.
73. Приведите пример безусловно устойчивой схемы.
85. Сформулируйте необходимое спектральное условие устойчивости Неймана для решения разностной задачи Коши.

Я уж не буду по ходу писать, на какой вопрос из списка мы отвечаем, полагаю, не запутаетесь – вопросов всего 6.

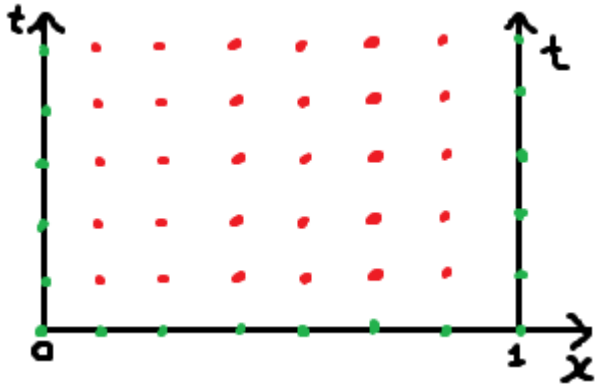
Будем решать задачу теплопроводности
$u_t=u_{xx}+f(x,t)$ на отрезке от 0 до 1.
Не забудем ГУ и НУ:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = \mu_0(t), \\ u(1,t) = \mu_1(t)\,. \end{cases}$$

Будем её решать численно. Давайте представим нашу область:



и введём на ней сетку:



Я не зря покрасил точки на границах в зелёный цвет – дело в том, что значение u в них мы уже знаем благодаря ГУ и НУ. Наша задача – найти u в красных точках. Точнее, мы будем считать не u, а v – аппроксимацию u, т.н.

сеточную функцию. Если u(x,t) определена при любых x и t, то у v будет два индекса: V_m^n, n – индекс по времени, m – по координате.

τ – шаг по времени, h – шаг по координате.

Получим т.н. разностные схемы – дискретные аналоги производных.
Левая разностная схема для производной:

$$\frac{V^n - V^{n-1}}{\tau}$$

Правая разностная схема для производной:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau}$$

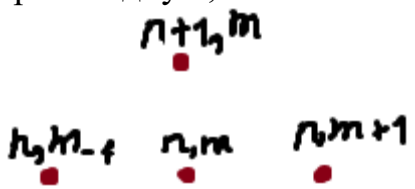
Разностная схема для второй производной, считаемая как приращение первой, делённое на h:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{v_{m+1} - v_m}{h} - \frac{v_m - v_{m-1}}{h}\right) = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2}$$

Подставим наши разностные схемы в уравнение теплопроводности.
Теперь вместо уравнения $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ у нас будет вот такое:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} \text{ или } \frac{V^n - V^{n-1}}{\tau} = \frac{V_{m+1} - 2V_m + V_{m-1}}{h^2} + f_m^n$$

f_m^n - значение f(x,t) в данной точке сетки.
Это равенство должно быть выполнено в любой неграничной точке сетки. Оно связывает точку с её соседями. В случае, если мы выберем правую производную, соотношение свяжет вот такие четыре точки на сетке:



Если левую – то вот такие:

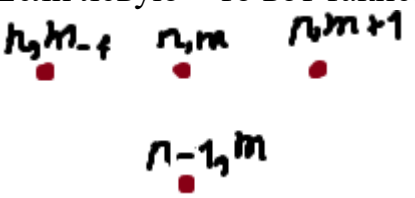
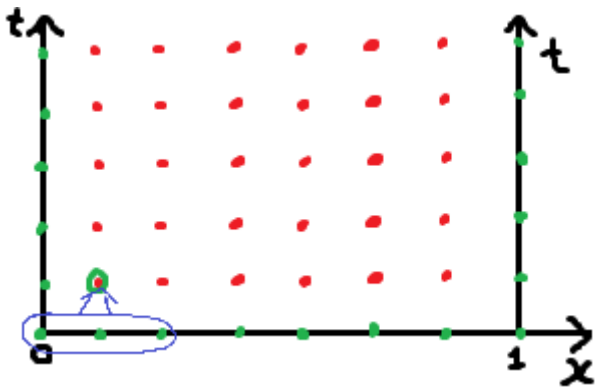
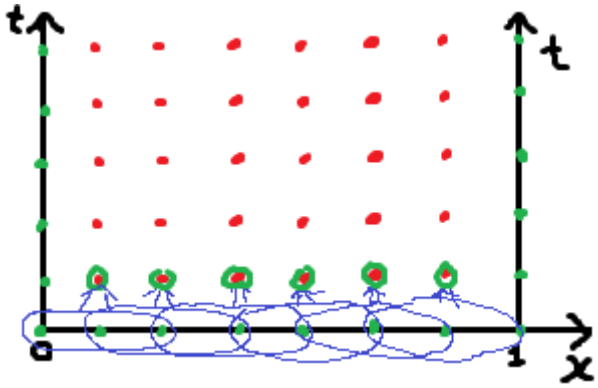


Схема с правой производной называется явной, давайте посмотрим, как она работает. Итак, применяем наш четырёхточечный шаблон (см. рисунок):

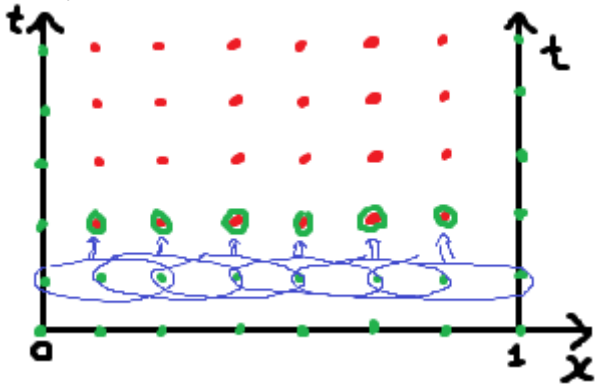


Зная три точки в четырёхточечном шаблоне, мы всегда можем найти значение в чётвёртой. Таким образом, мы находим значение в новой точке (см. рисунок выше ещё раз).

Точно так же делаем со всеми точками в нижней строке, всю её просчитывая:

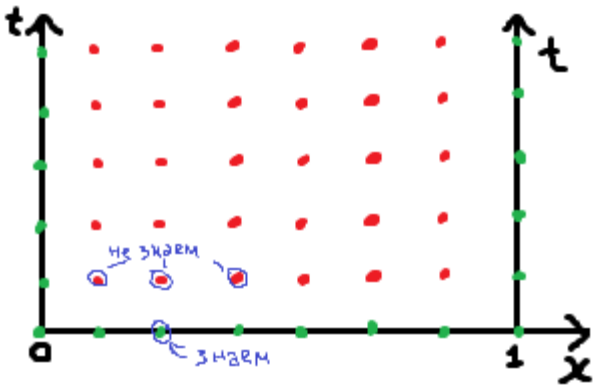


Ну а далее, узнав всё про следующий слой, узнаём всё про следующий следующим:



И так далее.
Благодаря такой чёткой и простой схеме она и называется явной.

Что же касается неявной схемы, то там так просто подсчитать точку наверху не получится:



Это не смертельно: мы можем написать уравнения для каждой точки строчки выше текущей, получим СЛАУ, которую решим. Только вот это дополнительные вычисления, да ещё чем меньше h, тем больше уравнений в СЛАУ будет. Если у нас на слое N точек, то для решения СЛАУ из N уравнений потребуется для $O(N^2)$ операция.

Зачем тогда неявная схема? А она устойчивее.

Есть необходимое условие устойчивости – т.н. спектральный критерий Неймана. Так вот, для неявной схемы он будет выполняться всегда, а для явной нет.

Критерий следующий: сделаем НУ в виде мнимой экспоненты:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \dfrac{v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}}{h^2}, \\ v_{m,0} = e^{iwm}. \end{cases}$$

Тогда решение тоже будет в каждой строчке мнимой экспонентой:

$v_{m,n} = \lambda^n e^{iwm}$, только вот с коэфом λ^n. Нейман требует, чтобы $|\lambda|<=1$, а то иначе хрень получится. Причём при любом w!

Подставляем $v_{m,n} = \lambda^n e^{iwm}$ в разностную схему и получаем

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{w}{2}, \qquad |\lambda| \le 1.$$

$$\frac{2\tau}{h^2} \le 1 \Rightarrow \tau \le \frac{h^2}{2} \quad - \quad \textit{условная устойчивость}$$

«Условная» значит «устойчива при таком-то условии на τ и h».

А вот если мы подставим в неявную схему, то получим уже устойчивость при любых τ и h – безусловную устойчивость:

$$\frac{1-\frac{1}{\lambda}}{\tau}=\frac{e^{iw}-2+e^{-iw}}{h^2} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{\underbrace{1+\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{w}{2}}_{>1}}<1$$

- *выполнено при любом соотношении шагов !*

безусловная устойчивость.

Далее предлагаю покончить с задачей теплопроводности (с ней уже всё ясно) и научиться применять спектральный критерий Неймана к другим разностным схемам.

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=5\frac{y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2}+2\left(y_i^j-1\right);$$

- устойчива?

Обилие плюс единиц наталкивает нас на мысль, что это неявная схема.

Проверяем: y_i^j, единственное слагаемое в нижней строке, через верхнюю явно считается? Перекидываем слагаемые между частями – да, выражается. Значит, схема неявная, и она безусловно устойчива.

Теперь перейдём к менее тривиальным случаям:

$$\begin{cases}\dfrac{y_n^{s+1}-y_n^s}{\tau}-\dfrac{y_n^s-y_{n-1}^s}{h}=0;\\ y_n^0=\psi_n\,.\end{cases}$$

Далее по накатанной (Боголюбов зачем-то заменил w на α):

Будем искать решение поставленной разностной задачи в следующем виде:

$$y_n^s=\lambda^s e^{i\alpha n}\ .$$

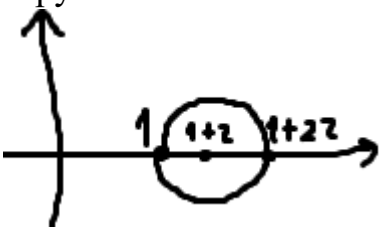
Подставляем вид решения в поставленную задачу и приходим к разностному уравнению следующего вида:

$$\frac{\lambda-1}{\tau}=\frac{1-e^{-i\alpha}}{h};\quad \frac{\tau}{h}=r\,.$$

Отсюда мы можем выразить $\lambda(\alpha)$:

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha} \quad ,$$

И эта штука должна быть $\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1$ при любом α. Видно, что при всевозможных значениях α множество точек λ(α) будет образовывать окружность на комплексной плоскости с центром в 1+r и радиусом r:



И понятно, какое бы мы r не брали, точки с модулем >1, будут. Вывод: схема неустойчива при любых τ и h!

Последний пример:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \dfrac{y_{n+1}^s - y_{n-1}^s}{2h} - \dfrac{\tau}{2h^2}\left(y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s\right) = 0; \quad s = 0,1,\ldots \\ y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1 \ldots \end{cases}$$

По-прежнему будем искать решение в следующем виде:

$$y_n^s = \lambda^s e^{i\alpha n} \quad .$$

Подставляем вид решения в рассматриваемую нами задачу и получаем разностное уравнение следующего вида:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha(n+1)} - e^{+i\alpha(n-1)}}{2h} - \frac{\tau}{2h^2}\left(e^{i\alpha(n+1)} - 2 + e^{i\alpha(n-1)}\right) = 0 .$$

Это выражение нужно упростить. Применяя $\dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin\alpha$, в итоге получим $\dfrac{\lambda - 1}{\tau} = -\dfrac{i}{h}\sin\alpha + \dfrac{2\tau}{h}\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 0$.

Обозначим $r = \frac{\tau}{h}$ и выразим λ :

$$\lambda = 1 + ir\sin\alpha - 2r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ .$$

Проверяем спектральный критерий устойчивости:

$$\left|\lambda(\alpha)\right| = \sqrt{\left(1 - 2r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r\sin\alpha\right)^2} \le 1 \ .$$

$$1 + 4r^4\sin^4\frac{\alpha}{2} - 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 1 \ .$$

$$4r^4\sin^4\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \le 0 \ .$$

$$\left(r^2 - 1\right)\sin^4\frac{\alpha}{2} \le 0 \ .$$

Отсюда:

$$r^\alpha \le 1 \ \Rightarrow \begin{cases} r \le 1 & \textit{условие Неймана выполнено} \\ r > 1 & \textit{условие Неймана не выполнено} \end{cases}$$

И ещё пример:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + 3\,\frac{y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}}{h} = 0$$

Ищем реш. в виде: $y_n^m = \lambda^m e^{i\alpha n}$

$$\frac{\lambda^{m+1} e^{i\alpha n} - \lambda^m e^{i\alpha n}}{\tau} + 3\,\frac{e^{i\alpha n}\lambda^{m+1}\left(e^{i\alpha} - 1\right)}{h} = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + 3\,\frac{\lambda\left(e^{i\alpha} - 1\right)}{h} = 0$$

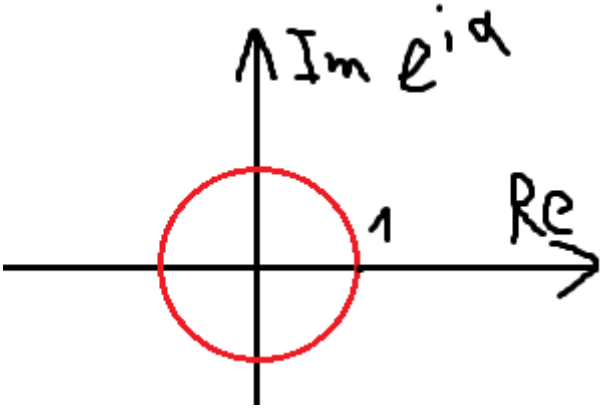
$$\lambda\left(\frac{1}{\tau} + \frac{3\tau}{h}\left(e^{i\alpha} - 1\right)\right) = 1 \qquad \lambda = \frac{1}{1 + \frac{3\tau}{h}\left(e^{i\alpha} - 1\right)}$$

$|\lambda| \le 1$ – критер. устойч.

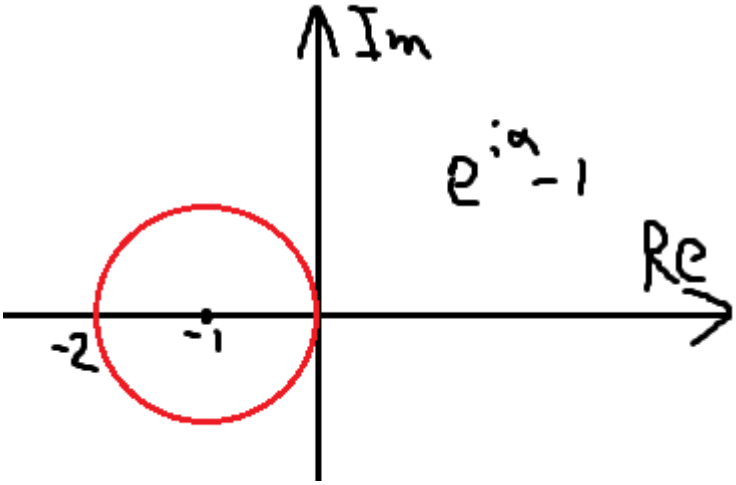
$$\exists\ \frac{3\tau}{h} = r \qquad \lambda = \frac{1}{1 + r\underbrace{\left(e^{i\alpha} - 1\right)}_{\text{окр-ть радиуса } r}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\varphi} \quad \varphi = 1 + r\left(e^{i\alpha} - 1\right)$$

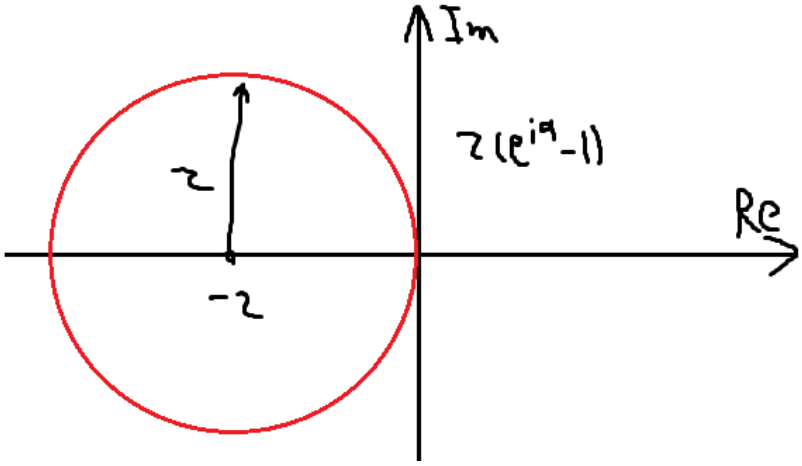
Тут я хотел бы прокомментировать именно что самый последний шаг.
Нам нужно найти те значения r, при которых при любом α модуль φ будет >=1 (тогда, т.к. λ=1/φ, |λ| будет <=1 и схема будет устойчивой).
Как нам нарисовать φ на комплексной плоскости?
Поэтапно:



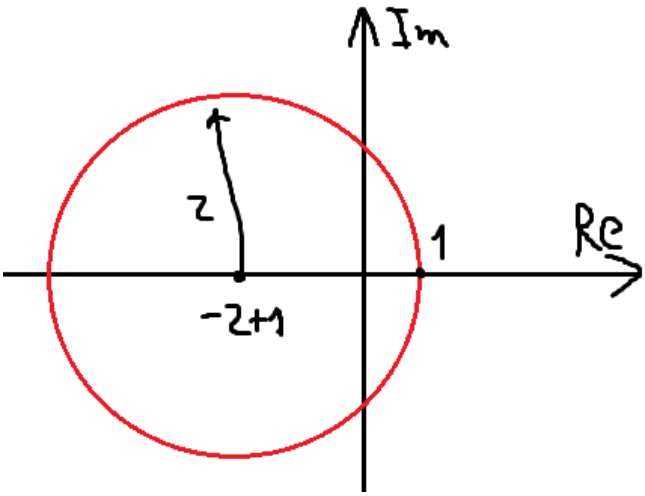
,



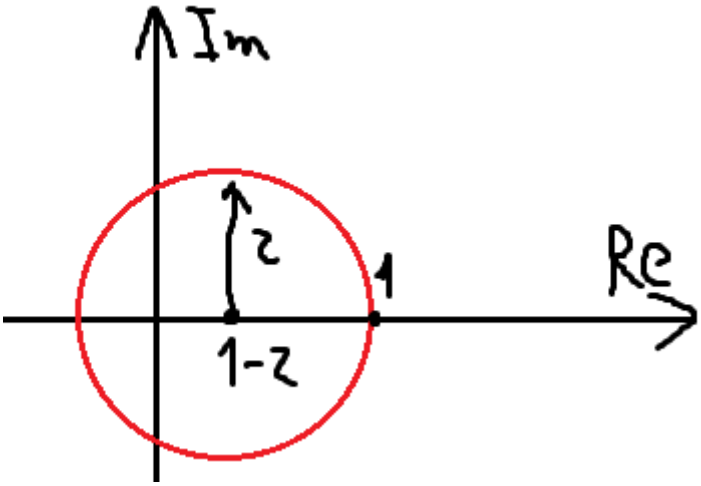
,



Ну и остался финальный шаг – добавить единицу.
Если r достаточно большое, то будет так:



И на рисунке видно, что одна из точек окружности имеет модуль 1, а остальные ещё больше. Это хороший случай: модуль φ велик, а модуль λ будет мал, схема будет устойчивой.
Если r мало, то будет так:



И тут, напротив, у многих точек окружности модуль <1. Т.е. найдутся α, для которых |φ| будет <=1, ну а для них |λ|=1/|φ| будет >1. Схема будет неустойчива.
Разница между случаем большого r и маленького r будет при r=1. Вы можете убедиться в этом в Десмосе: https://www.desmos.com/calculator/qvom5a5zpo
Ответикус: при r>=1 решение устойчиво, при r < 1 – неустойчиво.